
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. CAVALLUCCI

CONDIZIONE DI CARATHEODORY PER LE
SOLUZIONI OTTIME DELLE INCLUSIONI DIFFERENZIALI

Bologna, 24 MAGGIO 1984

1. INTRODUZIONE

Sia Ω aperto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tale che $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in \Omega\} \neq \emptyset$ per $0 \leq t \leq 1$. Date le funzioni

$$\Omega \ni (t, x) \rightarrow F(t, x) \neq \emptyset \text{ compatto convesso in } \mathbb{R}^n,$$

$$\Omega_1 \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R},$$

consideriamo il problema

$$(P) \quad \min\{f(x(1)) \mid x(t) \in F(t, x(t)) \text{ q.d., } (t, x(t)) \in \Omega$$

$$\text{per } 0 \leq t \leq 1, x(0) = x_0, x(1) \in C_1\}$$

Se esiste $\phi \in C^1(\Omega)$ tale che

$$\phi_t(t, x) + \phi_x(t, x) \cdot y \geq 0, \quad \forall y \in F(t, x), \quad \forall (t, x) \in \Omega,$$

$$\phi(1, x) = f(x), \quad \forall x \in C_1,$$

$$\phi(0, x_0) = f(z(1)),$$

dove $z(\cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una "traiettoria ammissibile" per (P), allora si ha per ogni altra traiettoria ammissibile $x(\cdot)$

$$\phi(1, x(1)) - \phi(0, x_0) = \int_0^1 [\phi_t(t, x(t)) + \phi_x(t, x(t)) \cdot \dot{x}(t)] dt \geq 0,$$

e quindi

$$x(1) \in C_1 \Rightarrow f(x(1)) \geq f(z(1)).$$

Pertanto $z(\cdot)$ è soluzione del problema (P).

Clarke e Vinter [1] hanno provato che la esistenza di una funzione ϕ così fatta implica anche che il problema (P) è "calmo in $z(\cdot)$ ". Inoltre hanno provato, sotto convenienti ipotesi su F e f , che, se $z(\cdot)$ è soluzione locale di (P) e (P) è calmo in $z(\cdot)$, allora esiste in un intorno di $z(\cdot)$ una funzione ϕ lipschitziana che verifica le condizioni indicate sopra "in senso generalizzato".

Qui ci proponiamo di esporre i risultati di [1] con una integrazione relativa alle soluzioni generalizzate secondo Crandall-Lions [2]. Tali risultati sono espressi mediante i concetti di "gradiente generalizzato", "cono normale", per i quali rimandiamo a [3], e di un altro tipo di gradiente generalizzato introdotto in [2].

2. PRELIMINARI

Facciamo le seguenti ipotesi sui dati del problema (P)

- a) f è lipschitziana in Ω_1 ;
- b) C_1 è chiuso;
- c) F assume valori non vuoti compatti e convessi in \mathbb{R}^n , è continua rispetto alla distanza h di Dousdorff, ossia

$$(1) \quad h[F(t', x'), F(t, x)] \rightarrow 0 \quad \text{per } (t', x') \rightarrow (t, x),$$

esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$(2) \quad h[F(t, x'), F(t, x)] \leq L|x' - x|,$$

esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$(3) \quad F(t, x) \subset MB.$$

Qui abbiamo indicato con B la sfera $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$.

La *funzione hamiltoniana* è definita da

$$(4) \quad H(t, x, p) = \max\{p \cdot v \mid v \in F(t, x)\},$$

dove $p \cdot v$ indica il prodotto scalare in \mathbb{R}^n .

Dalle ipotesi fatte su F segue che H è continua su $\Omega \times \mathbb{R}^n$ e che $H(t, \cdot, \cdot)$ è localmente lipschitziana.

Ricordiamo le definizioni di Clarke [3] di *derivata generalizzata nella direzione h* , per f localmente lipschitziana,

$$f^0(x; h) = \limsup_{\substack{x' \rightarrow x \\ s \rightarrow 0+}} \frac{f(x' + sh) - f(x')}{s},$$

di *gradiente generalizzato*

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall h \in \mathbb{R}^n: v \cdot h \leq f^0(x; h)\} =$$

$$= \langle \{\lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i) \mid x_i \rightarrow x\} \rangle$$

e di *cono normale* al chiuso C in $x \in C$

$$N(C; x) = \overline{\bigcup_{t \geq 0} t \partial \rho(x, C)} =$$

$$= \langle \{\lim_{i \rightarrow \infty} t_i (x_i - \tilde{x}_i) \mid t_i \geq 0, C \ni x_i \rightarrow x, C \ni \tilde{x}_i = \text{punto di minima distanza da } x_i\} \rangle$$

essendo

$$\rho(x, C) = \inf\{|y-x| \mid y \in C\},$$

$\langle A \rangle$ = involucro convesso di A e \bar{A} = chiusura di A .

Crandall e Lions [2] hanno introdotto un nuovo tipo di soluzione generalizzata (viscosity solution) per l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$(5) \quad G(x, u(x), \nabla u(x)) = 0,$$

utilizzando gli insiemi

$$(6) \quad D^{\pm}u(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \frac{[u(x)-u(x_0) - v \cdot (x-x_0)]^{\pm}}{|x-x_0|} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0\},$$

dove u è continua in un intorno di x_0 , $t^+ = \max\{t, 0\}$, $-t^- = \min\{t, 0\}$ e ∇u = gradiente di u .

Se 0 è aperto in \mathbb{R}^n e $G: 0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, la funzione $u: 0 \rightarrow \mathbb{R}$ continua si dirà, seguendo [2], soluzione generalizzata della equazione (5) se

$$(7) \quad \pm G(x, u(x), v) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } v \in D^{\pm}u(x).$$

In seguito esporremo alcune delle principali proprietà di queste soluzioni generalizzate. Per ora ci limitiamo alla seguente

Proposizione 1. Se $u: 0 \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, valgono le affermazioni

i) se esiste il gradiente $\nabla u(x)$, allora

$$(8) \quad D^+u(x) = D^-u(x) = \{\nabla u(x)\};$$

- ii) se $D^+u(x) \neq \emptyset \neq D^-u(x)$, allora $D^+u(x) = D^-u(x) = \{\nabla u(x)\}$;
 iii) ognuno degli insiemi $D^+u(x)$, $D^-u(x)$ è non vuoto su un sottoinsieme denso di 0 ed è convesso;
 iv) se u è localmente lipschitziana, si ha

$$(9) \quad D^+u(x) \cup D^-u(x) \subset \partial u(x)$$

e se u verifica (7), allora verifica (5) quasi dappertutto su 0 .

Le prime due affermazioni si verificano facilmente. Proviamo iii). Sia $x_0 \in 0$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $x_0 + \varepsilon B \subset 0$. Seguendo [2], fissiamo $0 \leq g \in C_0^\infty(x_0 + \varepsilon B)$ tale che $g(x_0) = 1$. Allora si ha

$$\begin{aligned} & \max\{g(x) [u(x) - u(x_0) + 1] \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\} = \\ & = g(x_\varepsilon) [u(x_\varepsilon) - u(x_0) + 1] \geq 1 \end{aligned}$$

e quindi deve essere $|x_\varepsilon - x_0| < \varepsilon$ e $g(x_\varepsilon) > 0$. Ne segue che si ha in un intorno di x_ε

$$u(x) \leq \frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)} [u(x) - u(x_0) + 1] + u(x_0) - 1 = h(x),$$

$$u(x_\varepsilon) = h(x_\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} u(x) - u(x_\varepsilon) & \leq h(x) - h(x_\varepsilon) = \\ & = \nabla h(x_\varepsilon) \cdot (x - x_\varepsilon) + |x - x_\varepsilon| r(x), \end{aligned}$$

con $r(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_\varepsilon$.

Di conseguenza si ha

$$\frac{[u(x) - u(x_\epsilon) - \nabla h(x_\epsilon) \cdot (x - x_\epsilon)]^+}{|x - x_\epsilon|} \xrightarrow{x \rightarrow x_\epsilon} 0$$

e quindi $\nabla h(x_\epsilon) \in D^+u(x_\epsilon)$, $|x_\epsilon - x_0| < \epsilon$. Questo prova iii) relativamente a D^+u .

Proviamo iv) per D^+u . Se $v \in D^+u(x_0)$, si ha

$$\frac{[u(x) - u(x_0) - v \cdot (x - x_0)]^+}{|x - x_0|} = r(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0,$$

$$u(x) - u(x_0) - v \cdot (x - x_0) \leq |x - x_0| r(x)$$

e di qui segue, con $x - x_0 = th$, $t > 0$,

$$\begin{aligned} -v \cdot h - |h| r(x_0 + th) &\leq \\ &\leq \frac{u(x_0) - u(x_0 + th)}{t} = \\ &= \frac{u((x_0 + th) - th) - u(x_0 + th)}{t} \end{aligned}$$

e quindi

$$v \cdot (-h) \leq u^0(x_0; -h), \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Ne segue che $v \in \partial u(x_0)$. In modo analogo si procede per D^-u . Si completa la dimostrazione di iv) ricordando che u è differenziabile quasi dappertutto in 0 e che vale (8).

Osservazione. L'inclusione in (9) può essere stretta, poiché esistono funzioni lipschitziane u differenziabili in x ma con $\partial u(x) \neq \{\nabla u(x)\}$.

3. INCLUSIONI DIFFERENZIALI: DEFINIZIONI E RISULTATI PRINCIPALI

Ritorniamo ora al problema (P). Diremo, seguendo [1], traietoria ogni funzione assolutamente continua $x(\cdot)$ tale che

$$[0,1] \supset [t_0, t_1] \xrightarrow{x(\cdot)} \mathbb{R}^n,$$

$$(t, x(t)) \in \Omega \quad \text{per } t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{q.d.}$$

Tale traiettoria si dirà *ammissibile* se $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e

$$x(0) = x_0, \quad x(1) \in C_1.$$

Se $\epsilon > 0$, poniamo

$$T_\epsilon(x(\cdot)) = \{(t, y) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \mid |y - x(t)| < \epsilon \text{ per } t_0 \leq t \leq t_1\}.$$

La traiettoria ammissibile $z(\cdot)$ si dirà *localmente ottima* se esiste $\epsilon > 0$ tale che $T_\epsilon(z(\cdot)) \subset \Omega$ e se $f(z(1)) \leq f(\bar{x}(1))$ per ogni altra traiettoria ammissibile $\bar{x}(\cdot)$ contenuta in $T_\epsilon(z(\cdot))$.

In [4] è contenuto il seguente

Teorema 1. Sia $z(\cdot) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente ottima per il problema (P). Allora esistono un numero reale $\lambda \in \{0,1\}$ e una funzione assolutamente continua $p(\cdot) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che

$$(-\dot{p}(t), \dot{z}(t)) \in \partial H(t, z(t), p(t)) \quad \text{q.d.},$$

$$-p(1) \in N(C_1; z(1)) + \lambda \partial f(z(1)),$$

$$\lambda + |p(1)| > 0.$$

Sempre seguendo Clarke [4], diremo che il problema (P) è localmente calmo nella traiettoria $z(\cdot)$ localmente ottima se esistono le costanti $\epsilon > 0$ e $K > 0$ tali che

$$(10) \quad f(z(1)) - K|u| \leq f(x(1))$$

per ogni $u \in \mathbb{R}^n$ e per ogni traiettoria $x(\cdot) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contenuta in $T_\epsilon(z(\cdot)) \subset \Omega$ e verificante le condizioni

$$(11) \quad x(0) = x_0, \quad x(1) \in C_1 + u$$

Data la traiettoria $x(\cdot)$ contenuta in $T_\epsilon(z(\cdot))$, se $x(0) = x_0$ e se

$$\rho(x(1), C_1) = |x(1) - c_1|, \quad c_1 \in C_1,$$

otteniamo da (10) con $u = x(1) - c_1$,

$$(12) \quad f(z(1)) \leq f(x(1)) + K \rho(x(1), C_1).$$

Pertanto, se (P) è localmente calmo in $z(\cdot)$, $z(\cdot)$ risolve anche il problema

$$(P') \quad \min\{f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1) \mid \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ q.d.},$$

$$|x(t) - z(t)| < \epsilon \text{ per } 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = x_0\}$$

Se si applica il Teorema 1 a questo problema, con $C_1 = \mathbb{R}^n$, e

quindi con $N(C_1; z(1)) = \{0\}$, e con la funzione f sostituita da $f(\cdot) + K\rho(\cdot, C_1)$, si vede che deve essere $\lambda = 1$ e quindi che $p(\cdot)$ e $z(\cdot)$ verificano le condizioni

$$(13) \quad (-\dot{p}(t), \dot{z}(t)) \in \partial H(t, z(t), p(t)) \quad \text{q.d.},$$

$$(14) \quad -p(1) \in \partial f(z(1)) + K \partial \rho(z(1), C_1).$$

Ne segue che in questo caso vale il Teorema 1 con $\lambda = 1$.

Con Clarke e Vinter [1], diremo che il problema (P) è *fortemente normale* nella traiettoria $z(\cdot)$ localmente ottima se il problema

$$(-\dot{p}(t), \dot{z}(t)) \in \partial H(t, z(t), p(t)) \quad \text{q.d.},$$

$$-p(1) \in N(C_1; z(1))$$

ha come unica soluzione assolutamente continua la funzione $p(t) = 0$ per $0 \leq t \leq 1$.

Dunque anche in questo caso vale il Teorema 1 con $\lambda = 1$.

Clarke e Vinter [1] hanno provato che la forte normalità implica anche la calma locale in $z(\cdot)$, come vedremo nel Teorema 3.

I risultati principali sulle inclusioni differenziali che ci proponiamo di esporre sono enunciati nei teoremi 2 e 3 che seguono.

Teorema 2. Sia $z(\cdot): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una traiettoria ammissibile per il problema (P). Allora sono equivalenti le affermazioni (A) e (B) seguenti

(A) Esistono $\delta > 0$ tale che $T_\delta(z(\cdot)) \subset \Omega$ e una funzione localmente Lipschitziana $\phi: T_\delta(z(\cdot)) \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica le condizioni

$$(15) \quad \phi(0, x_0) = f(z(1)), \quad \phi(1, x) = f(x) \quad \text{per } x \in C_1$$

e una delle condizioni (1a)-(5a) seguenti nei punti interni di $T_\delta(z(\cdot))$

$$(1a) \quad \alpha - H(t, x, -\beta) \geq 0, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \partial\phi(t, x);$$

$$(2a) \quad \phi_t(t, x) - H(t, x, -\phi_x(t, x)) \geq 0 \quad \text{q.d.};$$

$$(3a) \quad \min\{\alpha - H(t, x, -\beta) \mid (\alpha, \beta) \in \partial\phi(t, x)\} = 0;$$

$$(4a) \quad \phi_t(t, x) - H(t, x, -\phi_x(t, x)) = 0 \quad \text{q.d.};$$

$$(5a) \quad \alpha - H(t, x, -\beta) \geq 0, \quad \forall (\alpha, \beta) \in D^-\phi(t, x);$$

(B) $z(\cdot)$ è localmente ottima e (P) è localmente calmo in $z(\cdot)$.

Osservazione. Vedremo nel corso della dimostrazione che la funzione ϕ che compare in (A) deve verificare anche la condizione

$$(15') \quad \phi(t, z(t)) = \text{costante} \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1.$$

Una condizione sufficiente per la validità dell'affermazione (B) è data dal seguente

Teorema 3. Sia $z(\cdot) : [0, 1] \rightarrow R^n$ una traiettoria localmente ottima per (P). Se (P) è fortemente normale in $z(\cdot)$, allora (P) è calmo in $z(\cdot)$.

4. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2

Se $(k A)$ rappresenta l'affermazione "esiste ϕ come in (A) che verifica (15) e (ka) ", proviamo le implicazioni

$$(1A) \rightarrow (B) \rightarrow (4A) \rightarrow (3A) \rightarrow (1A),$$

$$(B) \rightarrow (5A) \rightarrow (2A) \rightarrow (1A).$$

Procediamo come nella dimostrazione del Teorema 5.1 di [1]. Nell'enunciato di tale teorema sono considerate solo le affermazioni (3A) e (B), ma nel corso della dimostrazione sono provate le implicazioni $(1A) \rightarrow (B) \rightarrow (2A) \rightarrow (1A)$ e $(B) \rightarrow (3A) \rightarrow (1A)$. Per (5a) si veda [5].

Lemma 1. Sia $x(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ assolutamente continua, sia t un punto di Lebesgue per $x(\cdot)$ e sia $\phi: T_\delta(x(\cdot)) \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana. Allora i limiti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t+h, x(t+h)) - \phi(t, x(t))}{h},$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t+h, x(t) + h \dot{x}(t)) - \phi(t, x(t))}{h}$$

esistono o non esistono contemporaneamente e se esistono sono uguali.

Si ha infatti, se L è la costante di Lipschitz per ϕ e se $h > 0$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\phi(t+h, x(t+h)) - \phi(t, x(t))}{h} - \frac{\phi(t+h, x(t)+h\dot{x}(t)) - \phi(t, x(t))}{h} \right| \leq \\
& \leq \frac{L}{h} |x(t+h) - x(t) - h\dot{x}(t)| = \\
& = \frac{L}{h} \left| \int_t^{t+h} [\dot{x}(s) - \dot{x}(t)] ds \right| \leq \\
& \leq \frac{L}{h} \int_t^{t+h} |\dot{x}(s) - \dot{x}(t)| ds \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

e questo basta.

Proviamo ora che (1A) \rightarrow (B).

Sia $x(\cdot) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una traiettoria contenuta in $\tau_{\frac{\varepsilon}{2}}(z(\cdot))$.

Allora la funzione $t \rightarrow \phi(t, x(t))$ è lipschitziana e quindi $\frac{\varepsilon}{2}$ si ha

$$(i) \quad \phi(1, x(1)) - \phi(0, x(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \phi(t, x(t)) dt.$$

Supponiamo che $t \in [0,1]$ sia punto di Lebesgue per $x(\cdot)$, che $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ e che esista la derivata $\frac{d}{dt} \phi(t, x(t))$. Allora segue dal Lemma 1, per $h \rightarrow 0+$,

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt} \phi(t, x(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} - \frac{\phi(t+h, x(t)+h\dot{x}(t)) - \phi(t, x(t))}{h} = \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi((t+h) - h, (x(t)+h\dot{x}(t)) - h\dot{x}(t)) - \phi(t+h, x(t)+h\dot{x}(t))}{h}
\end{aligned}$$

e di qui segue

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt} \phi(t, x(t)) &\leq \phi^o(t, x(t); -1, -\dot{x}(t)) = \\
&= \max \{-(1, \dot{x}(t)) \cdot (\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in \partial \phi(t, x(t))\} = \\
&= -\min \{\alpha + \beta \cdot \dot{x}(t) \mid (\alpha, \beta) \in \partial \phi(t, x(t))\}.
\end{aligned}$$

Si ha poi

$$-\beta \cdot \dot{x}(t) \leq \max\{(-\beta) \cdot y \mid y \in F(t, x(t))\} = H(t, x(t), -\beta)$$

e quindi si ha, quasi dappertutto,

$$\frac{d}{dt} \phi(t, x(t)) \geq \min\{\alpha - H(t, x(t), -\beta) \mid (\alpha, \beta) \in \partial \phi(t, x(t))\}$$

e quindi, a causa di (1a)

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} \phi(t, x(t)) \geq 0 \quad \text{q.d.}$$

Se $x(0) = x_0$, da (i) e (ii) segue

$$(iii) \quad \phi(1, x(1)) - f(z(1)) \geq 0.$$

Se $x(1) \in C_1$, da (iii) e da (15) segue $f(x(1)) \geq f(z(1))$, ossia $z(\cdot)$ è lo calmente ottima.

In ogni caso si ha, se poniamo $\rho(x(1), C_1) = |c_1 - x(1)|$, $c_1 \in C_1$,

$$|z(1) - c_1| \leq |z(1) - x(1)| + |x(1) - c_1| \leq 2 |z(1) - x(1)| < \delta,$$

e quindi $(1, c_1) \in T_\delta(z(\cdot))$ e da (15) segue

$$\phi(1, c_1) = f(c_1).$$

Detta K la costante di Lipschitz della funzione $x \rightarrow \phi(1, x) - f(x)$, si ottiene dalle formule precedenti

$$\begin{aligned} \phi(1, x(1)) &= [\phi(1, x(1)) - f(x(1))] + f(x(1)) \leq \\ &\leq K |x(1) - c_1| + f(x(1)) \end{aligned}$$

e quindi

$$(iv) \quad \phi(1, x(1)) \leq f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1).$$

Se $x(0) = x_0$ e se $x(1) \in C_1 + u$, si ha $\rho(x(1), C_1) \leq |u|$ e quindi, a causa di (iii) e (iv),

$$f(z(1)) \leq f(x(1)) + K |u|$$

Con questo si è provato che da (1A) segue (B).

Supponiamo ora che valga (B). Allora esistono le costanti positive K, ϵ tali che

$$(v) \quad T_{3\epsilon}(z(\cdot)) \in \Omega,$$

$$(vi) \quad f(z(1)) \leq f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1)$$

per ogni traiettoria $x(\cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contenuta in $T_{3\epsilon}(z(\cdot))$ a verificante la condizione $x(0) = x_0$.

Osserviamo che, se esiste la funzione ϕ che si desidera definita su $T_{3\epsilon}(z(\cdot))$ e se $x(\cdot): [s, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una traiettoria contenuta in

$T_{3\epsilon}(z(\cdot))$ e se $x(s) = u$, dalle formule (ii) e (iv) precedenti segue

$$\phi(s, u) \leq f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1).$$

Seguendo Clarke e Vinter [1], poniamo

$$(16) \quad \phi(s, u) = \inf\{f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1) + q \int_s^1 (|x(t) - z(t)| - \epsilon)^+ dt \mid$$

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), |x(t) - z(t)| < 3\epsilon \text{ per } s \leq t \leq 1, x(s) = u\}$$

Per provare che ϕ soddisfa le nostre richieste premettiamo alcuni lemmi.

Lemma 2. Esiste una costante $A > 0$ tale che, dati a piacere

$a > 0$, $s \in [s_1, s_2] \subset [0, 1]$ e la funzione $x(\cdot): [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ assolutamente continua che verifica le condizioni

$$T_a(x(\cdot)) \subset \Omega,$$

$$A \int_{s_1}^{s_2} \rho(\dot{x}(t), F(t, x(t))) dt < a,$$

esiste una traiettoria $y(\cdot): [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ che verifica le condizioni

$$y(s) = x(s),$$

$$\left| \int_s^{s'} |\dot{y}(t) - \dot{x}(t)| dt \right| \leq A \left| \int_s^{s'} \rho(\dot{x}(t), F(t, x(t))) dt \right|, \quad \forall s' \in [s_1, s_2],$$

$$|y(t) - x(t)| < a \quad \text{per } s_1 \leq t \leq s_2.$$

Questa è una variante di noti risultati sulle inclusioni differenziali (cfr [6], [7] oltre a [1]).

Lemma 3. Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni (1), (2), (3), e (v). Supponiamo inoltre $\gamma > 0$, $|f(x)| \leq M_1$ per $|x-z(1)| < 3\varepsilon$ e

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{1+AL}, \quad q \geq \frac{4M}{\varepsilon} (K(1+AL)\delta + 2M_1 + \gamma),$$

essendo A la costante che figura nel Lemma 2. Allora sono valide le seguenti affermazioni

- i) per ogni $(s,u) \in T_\delta(z(\cdot))$ esiste una traiettoria $x(\cdot): [s,1] \rightarrow R^n$ tale che $x(s) = u$ e $|x(t) - z(t)| < \delta(1+AL)$ per $s \leq t \leq 1$;
- ii) per ogni $(s,u) \in T_\delta(z(\cdot))$ si ha $\phi(s,u) = \text{minimo}$ del funzionale a secondo membro in (16) e ogni traiettoria minimizzante $x(\cdot)$ verifica la condizione $|x(t) - z(t)| \leq 2\varepsilon$ per $s \leq t \leq 1$;
- iii) se $(s,u) \in T_\delta(z(\cdot))$ e $x(\cdot)$ è una traiettoria minimizzante per $\phi(s,u)$, esiste $\sigma > 0$ tale che $(t,x(t)) \in T_\delta(z(\cdot))$ per $s \leq t \leq s + \sigma$ e

$$(17) \quad \phi(s,u) = \phi(t, x(t)) \quad \text{per } s \leq t \leq s + \sigma;$$

iv) Se $|u-z(1)| < \delta$, allora

$$\phi(1, u) = f(u) + \rho(u, C_1);$$

v) se vale inoltre la condizione (vi), si ha

$$\phi(0, x_0) = f(z(1)) = \phi(t, z(t)) \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1.$$

Poniamo

$$(18) \quad g_{s,u}(x(\cdot)) = f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1) + q \int_s^1 (|x(t)-z(t)|-\epsilon)^+ dt$$

Per provare i) applichiamo il

Lemma 2 alla funzione

$$x(t) = z(t) + u-z(s), \quad s \leq t \leq 1,$$

per la quale si ha

$$\begin{aligned} r(t) &= \rho(\dot{x}(t), F(t, x(t))) = \rho(\dot{z}(t), F(t, z(t)+u-z(s))) \leq \\ &\leq h[F(t, z(t)), F(t, z(t)+u-z(s))] \leq L |u-z(s)| \end{aligned}$$

e quindi

$$A \int_s^1 r(t) dt \leq AL|u-z(s)| < AL\delta = a.$$

Si ha anche $T_a(x(\cdot)) \subset T_\epsilon(z(\cdot)) \subset \Omega$ e quindi possiamo dedurre dal Lemma 2 che esiste una traiettoria $y(\cdot): [s, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contenuta in $T_a(x(\cdot))$ tale che $y(s) = u$ e

$$|y(t) - z(t)| < \delta(1+AL) \quad \text{per } s \leq t \leq 1,$$

come si voleva.

Per provare ii) poniamo per ogni $(s, u) \in T_\delta(z(\cdot))$

$$(16') \quad E_{s,u} = \{x(\cdot); [s, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n | x(\cdot) = \text{traiettoria}, x(s) = u,$$

$$|x(t) - z(t)| \leq 2\epsilon \text{ per } s \leq t \leq 1\},$$

e dimostriamo che si ha

$$(16'') \quad \phi(s, u) = \min\{g_{s, u}(x(\cdot)) \mid x(\cdot) \in E_{s, u}\}.$$

Cominciamo a provare che, se la traiettoria $y(\cdot): [s, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ verifica le condizioni $x(s) = u$ e

$$\max\{\delta(t) \mid s \leq t \leq 1\} = \delta(\bar{t}) > 2\varepsilon,$$

essendo

$$\delta(t) = |y(t) - z(t)| < 3\varepsilon \quad \text{per } s \leq t \leq 1,$$

allora risulta

$$(vii) \quad g_{s, u}(y(\cdot)) \geq \gamma + \phi(s, u)$$

Si ha infatti, ricordando (3),

$$\delta(\bar{t}) - \delta(t) \leq \left| \int_t^{\bar{t}} (|\dot{y}(r)| + |\dot{z}(r)|) dr \right| \leq 2M|\bar{t} - t|,$$

e quindi

$$\delta(t) \geq \delta(\bar{t}) - 2M|\bar{t} - t| > 2\varepsilon - 2M|\bar{t} - t|$$

Ne segue che si ha $\delta(t) - \varepsilon > 0$ per ogni t verificante la condizione

$$|\bar{t} - t| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Osserviamo che si ha per $t = s$

$$\varepsilon > \delta > \delta(s) > 2\varepsilon - 2M |\bar{t} - s|$$

e quindi

$$\bar{t} - \frac{\varepsilon}{2M} > s, \quad \varepsilon < 2M.$$

Da quanto sopra segue

$$\int_s^1 (\delta(t) - \varepsilon)^+ dt \geq \int_{\bar{t} - \frac{\varepsilon}{2M}}^{\bar{t}} [\varepsilon - 2M(\bar{t} - t)] dt = \frac{\varepsilon^2}{4M}$$

Sia ora $x(\cdot)$ una traiettoria che soddisfa le condizioni in i). Allora si ha

$$\begin{aligned} g_{s,u}(y(\cdot)) - g_{s,u}(x(\cdot)) &= f(y(1)) + K\rho(y(1), C_1) + \\ &+ q \int_s^1 (\delta(t) - \varepsilon)^+ dt - f(x(1)) - K\rho(x(1), C_1) - 0 \geq \\ &\geq \frac{q\varepsilon^2}{4M} - 2M_1 - K |x(1) - z(1)| > \\ &> \frac{q\varepsilon^2}{4M} - 2M_1 - K\delta(1 + AL) \geq \gamma \end{aligned}$$

e quindi è vera la (vii).

Di conseguenza si ha

$$\phi(s,u) = \inf\{g_{s,u}(x(\cdot)) \mid x(\cdot) \in E_{s,u}\}$$

Per provare che vale (16") prendiamo una successione $x_j(\cdot) \in E_{s,u}$ per

cui sia

$$\phi(s, u) \leq g_{s, u}(x_j(\cdot)) < \phi(s, u) + \frac{1}{j}.$$

Allora si ha per $s \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} x_j(s) &= u, \\ \dot{x}_j(t) &\in F(t, x_j(t)) \quad \text{q.d.}, \\ |\dot{x}_j(t)| &\leq M \quad \text{q.d.}, \\ |x_j(t) - z(t)| &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

e di qui segue (cfr [7] per esempio) che si può estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente alla traiettoria $\bar{x}(\cdot) \in E_{s, u}$ per la quale si ha $\phi(s, u) = g_{s, u}(\bar{x}(\cdot))$.

Proviamo iii). Per la traiettoria $x(\cdot)$ si ha $x(\cdot) \in E_{s, u}$ e inoltre si ha per $s \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} \phi(s, u) &= g_{s, u}(x(\cdot)) = q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \varepsilon)^+ dr + [q \int_t^1 (\dots)^+ dr + \\ &+ f(x(1)) + K\rho(x(1), C_1)] = \\ &= q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \varepsilon)^+ dr + g_{t, x(t)}(x(\cdot)) \geq \\ &\geq q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \varepsilon)^+ dr + \phi(t, x(t)), \end{aligned}$$

poiché la restrizione di $x(\cdot)$ all'intervallo $[t, 1]$ appartiene a $E_{t, x(t)}$.

Sia $y(\cdot) \in E_{t, x(t)}$ tale che $\phi(t, x(t)) = g_{t, x(t)}(y(\cdot))$.

Posto

$$\bar{x}(t') = \begin{cases} x(t') & \text{per } s \leq t' \leq t \\ y(t') & \text{per } t \leq t' \leq 1 \end{cases},$$

si ha $\bar{x}(\cdot) \in E_{s,u}$ e quindi

$$\begin{aligned} \phi(s,u) \leq g_{s,u}(\bar{x}(\cdot)) &= q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \epsilon)^+ dr + g_{t,x(t)}(y(\cdot)) = \\ &= q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \epsilon)^+ dr + \phi(t,x(t)) \end{aligned}$$

Pertanto abbiamo provato la formula

$$(17') \quad \phi(s,u) = q \int_s^t (|x(r) - z(r)| - \epsilon)^+ dr + \phi(t,x(t)) \quad , \text{ per } s \leq t \leq 1,$$

dove $x(\cdot) \in E_{s,u}$ è minimizzante per $\phi(s,u)$.

Se si prende $\sigma > 0$ tale che sia $|x(r) - z(r)| < \epsilon$ per $s \leq r \leq s + \sigma$, da (17') segue (17).

La iv) è evidente da (16).

Proviamo v). Siccome $z(\cdot) \in E_{0,x_0}$, si ha

$$\phi(0,x_0) \leq g_{0,x_0}(z(\cdot)) = f(z(1))$$

Inoltre da (vi) segue $f(z(1)) \leq g_{0,x_0}(x(\cdot))$ per ogni $x(\cdot) \in E_{0,x_0}$ e quindi

$$f(z(1)) \leq \phi(0,x_0)$$

Pertanto si ha

$$f(z(1)) = \phi(o, x_o) = g_{o, x_o}(z(\cdot))$$

e il resto segue da (17').

Questo conclude la dimostrazione del Lemma 3.

Lemma 4. Sotto le ipotesi del Lemma 3, la funzione

$$\left[\begin{array}{l} \phi: T_{\delta}(z(\cdot)) \rightarrow R \text{ definita in (16) è localmente lipschitziana.} \end{array} \right.$$

Proviamo prima la lipschitzianità rispetto a u mediante il

Lemma 2. Sia $\phi(s, u) = g_{s, u}(x(\cdot))$, con $x(\cdot) \in E_{s, u}$. Poniamo

$$\bar{x}(t) = x(t) + \bar{u} - u, \quad s \leq t \leq 1.$$

Allora si ha, poiché $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$,

$$r(t) = \rho(\dot{x}(t), F(t, \bar{x}(t))) = \rho(\dot{x}(t), F(t, x(t) + \bar{u} - u)) \leq$$

$$\leq h[F(t, x(t)), F(t, x(t) + \bar{u} - u)] \leq L|\bar{u} - u|$$

e quindi

$$A \int_s^1 r(t) dt \leq AL|\bar{u} - u| < AL\delta = a,$$

se supponiamo $|\bar{u} - u| < \delta$. In tal caso si ha anche $T_a(\bar{x}(\cdot)) \subset T_{3\epsilon}(z(\cdot)) \subset \Omega$

e quindi possiamo applicare il Lemma 2 e ottenere una traiettoria

$y(\cdot) : [s, 1] \rightarrow R^n$ tale che $y(s) = \bar{x}(s) = \bar{u}$ e

$$|y(t) - \bar{x}(t)| \leq \int_s^1 |\dot{y}(t) - \dot{\bar{x}}(t)| dt \leq AL|\bar{u}-u|, \quad s \leq t \leq 1,$$

$$y(\cdot) \in T_a(\bar{x}(\cdot)) \subset T_{3\epsilon}(z(\cdot)),$$

$$|y(t) - x(t)| \leq (AL+1)|\bar{u}-u|, \quad s \leq t \leq 1.$$

Di qui e da (16) segue, se L_1 è la costante di Lipschitz per f ,

$$\begin{aligned} \phi(s, \bar{u}) &\leq g_{s, \bar{u}}(y(\cdot)), \\ \phi(s, \bar{u}) - \phi(s, u) &\leq g_{s, \bar{u}}(y(\cdot)) - g_{s, u}(x(\cdot)) \leq \\ &\leq q \int_s^1 |y(t) - x(t)| dt + (L_1 + K)|y(1) - x(1)| \leq \\ &\leq (AL+1)(q+L_1+K)|\bar{u}-u| \end{aligned}$$

Pertanto si ha, con $L_2 = (AL+1)(q+L_1+K)$,

$$(viii) \quad |\phi(s, u) - \phi(s, \bar{u})| \leq L_2|u - \bar{u}|, \quad \text{se } |u - \bar{u}| < \delta.$$

Passiamo ora al caso generale. Sia $(\bar{s}, \bar{u}) \in T_\delta(z(\cdot))$, $s < \bar{s}$.
Se $\phi(s, u) = g_{s, u}(x(\cdot))$, con $x(\cdot) \in E_{s, u}$, si ha dal Lemma 3

$$\phi(s, u) = \phi(\bar{s}, x(\bar{s})) \quad \text{se } |s - \bar{s}| \leq \sigma.$$

Supponiamo inoltre

$$|s - \bar{s}| < \frac{\delta}{2M}, \quad |u - \bar{u}| < \frac{\delta}{2}.$$

Allora otteniamo

$$\begin{aligned}
 |x(\bar{s}) - \bar{u}| &\leq |x(\bar{s}) - x(s)| + |u - \bar{u}| \leq \\
 &\leq M|s - \bar{s}| + |u - \bar{u}| < \delta
 \end{aligned}$$

e quindi, utilizzando (viii),

$$\begin{aligned}
 |\phi(s, u) - \phi(\bar{s}, \bar{u})| &= |\phi(\bar{s}, x(\bar{s})) - \phi(\bar{s}, \bar{u})| \leq \\
 &\leq L_2 |x(\bar{s}) - \bar{u}| \leq L_2 (M|s - \bar{s}| + |u - \bar{u}|).
 \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione.

Lemma 5. (B) implica (5A) e (4A).

Se è vero (B), possiamo supporre soddisfatte le ipotesi del Lemma 3 e del Lemma 4. Dunque la formula (16) definisce $\phi: T_\delta(z(\cdot)) \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana che verifica (15). Proviamo che verifica anche (5a).

Sia $(\alpha, \beta) \in D^-\phi(s, u)$, con (s, u) punto interno a $T_\delta(z(\cdot))$ e quindi con $0 < s < 1$, e sia $v \in F(s, u)$. Poniamo

$$y(t) = u + (t-s)v, \quad \bar{s} \leq t \leq s.$$

Allora si ha, ricordando la formula (3),

$$r(t) = \rho(\dot{y}(t), F(t, y(t))) = \rho(v, F(t, u + (t-s)v)) \leq 2M,$$

$$A \int_{\bar{s}}^s r(t) dt \leq 2AM (s - \bar{s}).$$

Se fissiamo a e \bar{s} in modo da soddisfare le condizioni

$$0 < a \leq \frac{A}{1+A} (\delta - |u-z(s)|) ,$$

$$0 < s - \bar{s} < \frac{\delta}{2AM} ,$$

abbiamo $T_a(y(\cdot)) \subset T_\delta(z(\cdot)) \subset \Omega$ e quindi possiamo applicare il Lemma 2 e ottenere una traiettoria $\bar{y}(\cdot): [\bar{s}, s] \rightarrow \mathbb{R}^n$ che verifica le condizioni

$$\bar{y}(s) = u ,$$

$$(ix) \quad \int_{\bar{s}}^s |\bar{y}(r) - v| dr \leq A \int_{\bar{s}}^s \rho(v, F(r, u + (r-s)v)) dr \quad \text{per } \bar{s} \leq t \leq s,$$

$$(x) \quad \bar{y}(\cdot) \subset T_a(y(\cdot)) \subset T_\delta(z(\cdot)) \subset T_\epsilon(z(\cdot)).$$

Sia $y^*(\cdot) \in E_{s,u}$ tale che $\phi(s, u) = g_{s,u}(y^*(\cdot))$. Allora le due traiettorie $\bar{y}(\cdot)$ e $y^*(\cdot)$ si incollano in una traiettoria $\tilde{y}(\cdot) \in E_{\bar{s}, \bar{y}(\bar{s})}$ per la quale si ha, ricordando la (x), per $\bar{s} \leq t < s$,

$$\phi(t, \bar{y}(t)) \leq g_{t, \bar{y}(t)}(\tilde{y}(\cdot)) = g_{s,u}(y^*(\cdot)) = \phi(s, u).$$

Pertanto si ha

$$(xi) \quad \phi(t, \bar{y}(t)) \leq \phi(s, u) \quad \text{per } \bar{s} \leq t < s.$$

Dalla definizione di $D^-\phi(s, u)$ si ha

$$\frac{\min \{0, \phi(t, x) - \phi(s, u) - (\alpha, \beta) \cdot (t-s, x-u)\}}{|(t-s, x-u)|} = \epsilon(t-s, x-u) \xrightarrow{(t,x) \rightarrow (s,u)} 0,$$

e quindi

$$\phi(t, x) - \phi(s, u) - (\alpha, \beta) \cdot (t-s, x-u) \geq |(t-s, x-u)| \epsilon(t-s, x-u).$$

Se poniamo $x = \bar{y}(t)$ e usiamo (xi), otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &\geq \phi(t, \bar{y}(t)) - \phi(s, u) \geq \\ &\geq (\alpha, \beta) \cdot (t-s, \bar{y}(t) - u) + |(t-s, \bar{y}(t)-u)| \varepsilon(t-s, \bar{y}(t)-u). \end{aligned}$$

Poniamo $h = s - t > 0$. Allora si ha

$$\left| \frac{\bar{y}(s-h)-u}{h} \right| \leq \frac{1}{h} \int_{s-h}^s |\dot{\bar{y}}(t)| dt \leq M,$$

$$\frac{1}{h} |(t-h, \bar{y}(s-h)-u)| \varepsilon(-h, \bar{y}(s-h)-u) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}(s-h)-u}{h} &= -\frac{1}{h} \int_{s-h}^s \dot{\bar{y}}(t) dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_{s-h}^s [\dot{\bar{y}}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] dt = v, \end{aligned}$$

e si ha anche, ricordando (1) e (ix),

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{s-h}^s [\dot{\bar{y}}(t) - \dot{\bar{y}}(t)] dt \right| &\leq \frac{A}{h} \int_{s-h}^s \rho(v, F(t, u+(t-s)v)) dt \leq \\ &\leq \frac{A}{h} \int_{s-h}^s h [F(s, u), F(t, u + (t-s)v)] dt \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0 \end{aligned}$$

Pertanto si può concludere che riesce

$$0 \geq (\alpha, \beta) \cdot (-I, -v)$$

e quindi

$$\alpha \geq (-\beta) \cdot v, \quad \forall v \in F(s, u),$$

$$\alpha \geq \max\{(-\beta) \cdot v \mid v \in F(s, u)\} = H(s, u, -\beta).$$

Questo prova (5a).

Supponiamo ora $(\alpha, \beta) = \nabla \phi(s, u)$. Da quanto visto sopra segue

$$\alpha - H(s, u, -\beta) \geq 0.$$

Sia $x(\cdot) \in E_{s, u}$ minimizzante per $\phi(s, u)$. Allora si ha dal Lemma 3, formula (17), ricordando che è $s < 1$

$$(xii) \quad \phi(s, u) = \phi(t, x(t)) \quad \text{per} \quad s < t \leq s + \sigma.$$

Dalla definizione di gradiente

$$\frac{\phi(t, x) - \phi(s, u) - (\alpha, \beta) \cdot (t - s, x - u)}{|t - s, x - u|} = \epsilon(t - s, x - u) \xrightarrow{(t, x) \rightarrow (s, u)} 0$$

e da (xii) si ottiene, con $h = t - s > 0$,

$$\begin{aligned} & -(\alpha, \beta) \cdot \left(1, \frac{x(s+h) - x(s)}{h}\right) = \\ & = \left| \left(1, \frac{x(s+h) - x(s)}{h}\right) \right| \epsilon(h, x(s+h) - x(s)) = \epsilon_1(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(h) + \alpha &= (-\beta) \cdot \frac{x(s+h) - x(s)}{h} = \frac{1}{h} \int_s^{s+h} (-\beta) \cdot \dot{x}(t) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \max_{v \in F(t, x(t))} [(-\beta) \cdot v] dt = \frac{1}{h} \int_s^{s+h} H(t, x(t), -\beta) dt. \end{aligned}$$

Siccome H è continua, di qui segue

$$\alpha \leq H(s, u, -\beta),$$

e perciò si può concludere che

$$\alpha - H(s, u, -\beta) = 0,$$

come si voleva.

Lemma 6. (2a) implica (1a) e (4a) implica (3a).

Proviamo che (2a) implica (1a). Fissiamo $(\alpha, \beta) \in \partial \phi(t, x)$.

Osserviamo che (2a) si può scrivere nelle forme equivalenti

$$\begin{aligned} \phi_t &\geq \max_{v \in F(t, x)} (-\phi_x) \cdot v = - \min_{v \in F(t, x)} \phi_x \cdot v, \\ (2a') \quad \phi_t + \phi_x \cdot v &\geq 0 \quad , \quad \forall v \in F(t, x). \end{aligned}$$

Analogamente (1a) è equivalente a

$$(1a') \quad \alpha + \beta \cdot v \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad (\alpha, \beta) \in \partial \phi(t, x) \text{ e } v \in F(t, x).$$

Dalla definizione di $\partial \phi(t, x)$ segue che si ha

$$(\alpha, \beta) = \sum_0^u \lambda_k \xi_k \rightarrow \sum_0^n \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0,$$

$$\xi_k = \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla \phi(t_i, x_i), (t_i, x_i) \longrightarrow (t, x),$$

mentre dalla continuità di F segue

$$F(t, x) \subset F(t_i, x_i) + \varepsilon_i B, \quad \varepsilon_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Allora possiamo rappresentare $v \in F(t, x)$ nella forma

$$v = v_j + \varepsilon_i b_i, \quad v_j \in F(t_i, x_i), \quad |b_i| \leq 1,$$

e da (2a') otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \nabla \phi(t_i, x_i) \cdot (1, v_i) = \\ &= \nabla \phi(t_i, x_i) \cdot (1, v) - \varepsilon_i \nabla \phi(t_i, x_i) \cdot (1, b_i). \end{aligned}$$

Siccome $|\nabla \phi(t_i, x_i)| \leq L_2 = \text{costante di Lipschitz di } \phi$, si ottiene

$$0 \leq \xi_k \cdot (1, v)$$

e ancora

$$0 \leq \sum_0^n \lambda_k \xi_k \cdot (1, v) = (\alpha, \beta) \cdot (1, v) = \alpha + \beta \cdot v.$$

Questo prova (1a') e quindi (1a).

Per provare che (3a) segue da (4a) resta la prova che da (4a) segue la possibilità di trovare qualche $(\alpha, \beta) \in \partial \phi(t, x)$ per cui sia

$$\alpha - H(t, x, -\beta) = 0.$$

Per (4a), esiste una successione $(t_i, x_i) \rightarrow (t, x)$ tale che $\nabla \phi(t_i, x_i) = (\alpha_i, \beta_i)$ verifica (4a). Siccome si ha $|\nabla \phi(t_i, x_i)| \leq L_2$, possiamo supporre

$$(\alpha_i, \beta_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} (\alpha, \beta),$$

eventualmente passando a una sottosuccessione. Dalla semicontinuità superiore di $\partial \phi$ segue che $(\alpha, \beta) \in \partial \phi(t, x)$ e dalla continuità di H segue

$$\alpha - H(t, x, -\beta) = 0,$$

come si voleva.

Dai lemmi precedenti e dalla Proposizione 1 segue che si ha

$$(1A) \rightarrow (B) \rightarrow (4A) \rightarrow (3A) \rightarrow (1A),$$

$$(B) \rightarrow (5A) \rightarrow (2A) \rightarrow (1A),$$

e questo conclude la dimostrazione del Teorema 2.

Da (1A) segue anche (15'), poiché si da da (ii) e da (15), per $0 \leq t \leq 1$,

$$\phi(t, z(t)) - \phi(0, x_0) = \int_0^t \frac{d}{ds} \phi \geq 0,$$

$$\phi(1, z(1)) - \phi(t, z(t)) = \int_t^1 \frac{d}{ds} \phi \geq 0,$$

$$\phi(0, x_0) = \phi(z(1)) = \phi(1, z(1)).$$

5. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3

Supponiamo che (P) non sia calmo in $z(\cdot)$ e proviamo che non è fortemente normale.

Per ipotesi esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che $T_{\varepsilon_0}(z(\cdot)) \subset \Omega$ e $z(\cdot)$ è soluzione di (P) in $T_{\varepsilon_0}(z(\cdot))$. Supponiamo $\varepsilon_0 \leq 1$.

Applichiamo il Lemma 3 sotto le condizioni

$$0 < 3\varepsilon < \varepsilon_0, \quad \gamma = \varepsilon, \quad K = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \delta = \frac{\varepsilon^4}{1+AL},$$

$$q = \frac{4M}{\varepsilon} (2M_1 + 3\varepsilon) = q(\varepsilon)$$

Esiste $y(\cdot) \in E_{o, x_0}$ tale che

$$\begin{aligned} \phi(o, x_0) &= g_{o, x_0}(y(o)) = \\ &= f(y(1)) + \varepsilon^3 \rho(y(1), C_1) + q(\varepsilon) \int_0^1 (|y(t) - z(t)| - \varepsilon)^+ dt \leq \\ &\leq f(x(1)) + \varepsilon^{-3} \rho(x(1), C_1) + q(\varepsilon) \int_0^1 (|x(t) - z(t)| - \varepsilon)^+ dt \end{aligned}$$

per ogni traiettoria $x(\cdot) \subset T_{\varepsilon_0}(z(\cdot))$ con $x(o) = x_0$. Se moltiplichiamo il tutto per ε^3 , otteniamo che $y(\cdot)$ risolve il problema

$$(P_\varepsilon) \quad \min \{ \varepsilon^3 f(x(1)) + \rho(x(1), C_1) + q(\varepsilon) \varepsilon^3 \int_0^1 (|x(t) - z(t)| - \varepsilon)^+ dt \mid x(o) = x_0, \$$

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ q.d., } |x(t) - y(t)| < \varepsilon \text{ per } 0 \leq t \leq 1 \}$$

Osserviamo ora, con Clarke e Vinter [1], che si ha per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\rho(\xi, C_1) = \min \{ |\xi - c| \mid c \in C_1 \} =$$

$$= \min \{ |\xi - x_0(1)| \mid \dot{x}_0(t) = 0 \text{ per } 0 \leq t \leq 1, x_0(0) \in C_1 \}.$$

Di conseguenza possiamo scrivere (P_ε) nella forma

$$(P'_\varepsilon) \quad \min \{ \varepsilon^3 f(x(1)) + |x(1) - x_0(1)| + q(\varepsilon) \varepsilon^3 \int_0^1 (|x(t) - z(t)| - \varepsilon)^+ dt \mid x(0) = x_0,$$

$$x_0(0) \in C_1, \dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \dot{x}_0(t) = 0, |x(t) - y(t)| < \varepsilon \text{ per } 0 \leq t \leq 1 \}$$

e una soluzione di (P'_ε) è data da

$$t \rightarrow (c_1, y(t)) = (y_0(t), y(t)),$$

con $c_1 \in C_1$ tale che

$$(i) \quad \rho(y(1), C_1) = |y(1) - c_1|.$$

Tale soluzione deve verificare le condizioni di Hamilton (cfr. [8] per esempio) con Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t, (x_0, x), (p_0, p)) &= \max \{ p_0 \cdot 0 + p \cdot v \mid v \in F(t, x) \} = \\ &= H(t, x, p). \end{aligned}$$

Dunque esiste $(p_0(\cdot), p(\cdot)): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ assolutamente continua tale che

$$(-\dot{p}_0, -\dot{p}, \dot{y}_0, \dot{y}) \in \partial \hat{H}(t, y_0, y, p_0, p) - q(\varepsilon) \varepsilon^3 \partial(|y-z|-\varepsilon)^+,$$

$$(p_0(0), p(0)) \in N(C_1 \times \{x_0\}; (y_0(0), y(0))),$$

$$-(p_0(1), p(1)) \in \partial [\varepsilon^3 f(y(1)) + |y(1) - y_0(1)|].$$

Ne seguono le condizioni

$$(ii) \quad (-\dot{p}, \dot{y}) \in \partial H(t, y, p) - q(\varepsilon) \varepsilon^3 \partial(|y-z|-\varepsilon)^+,$$

$$(iii) \quad -p(1) \in \varepsilon^3 \partial f(y(1)) + \partial_y |y(1) - y_0(1)|.$$

Proviamo che $y(1) \in C_1$. Se così non fosse, la traiettoria $y(\cdot)$ sarebbe ammissibile per (P) e quindi si avrebbe

$$\begin{aligned} f(z(1)) &\leq f(y(1)) \leq f(y(1)) + \varepsilon^{-3} \rho(y(1), C_1) + \\ &+ q(\varepsilon) \int_0^1 (|y(t) - z(t)| - \varepsilon)^+ dt = \phi(0, x_0). \end{aligned}$$

Ma per ipotesi (P) non è calmo in $z(\cdot)$. Quindi esiste una traiettoria $x(\cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $x(0) = x_0$ e

$$|x(t) - z(t)| < \varepsilon \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1,$$

$$f(z(1)) > \frac{1}{\varepsilon} \rho(x(1), C_1) + f(x(1)).$$

Di qui si ottiene

$$f(z(1)) > f(x(1)) + \varepsilon^{-3} \rho(x(1), C_1) + q(\varepsilon) \int_0^1 (|x(t) - z(t)| - \varepsilon)^+ dt \geq \phi(0, x_0)$$

e questo contraddice la disuguaglianza precedente.

Ora vogliamo "passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ " in (ii) e (iii).

Osserviamo che si ha

$$(iv) \quad \partial(|y-z|-\varepsilon)^+ \subset B,$$

$$(v) \quad \partial f(y) \subset L_1 B,$$

se L_1 è la costante di Lipschitz per f .

Siccome $y(1) \neq c_1 = y_0(1)$, si ha anche

$$(vi) \quad \partial_y |y(1) - y_0(1)| = \frac{y(1)-c_1}{|y(1)-c_1|},$$

e quindi

$$(iii') \quad -p(1) \in \varepsilon^3 \partial f(y(1)) + \frac{y(1)-c_1}{|y(1)-c_1|}.$$

da (iii') e (v) segue

$$(vii) \quad |p(1)| \leq L_1 + 1,$$

mentre da (ii) e (iv) segue, per una costante $M_2 \geq 0$,

$$|\dot{p}(t)| \leq L_1 |p(t)| + M_2$$

e quindi, mediante il lemma di Gronwall, si ottiene, per una costante $M_3 \geq 0$,

$$(viii) \quad |\dot{p}(t)| \leq M_3 \quad \text{q.d.}$$

Si ha anche

$$(ix) \quad |y(1)| \leq |z(1)| + 2\varepsilon \leq |z(1)| + 1,$$

$$(x) \quad |\dot{y}(t)| \leq M \quad \text{q.d.},$$

$$(xi) \quad |y(t) - z(t)| \leq 2\varepsilon.$$

Da (ii), (vii), (ix), (viii), (x) segue che esiste una successione $\varepsilon_i \rightarrow 0+$ per $i \rightarrow \infty$ tale che, dette $y_i(\cdot)$ e $p_i(\cdot)$ le funzioni corrispondenti, riesce

$$y_i(t) \rightarrow z(t), \quad p_i(t) \rightarrow p(t) \quad \text{per } i \rightarrow \infty$$

uniformemente per $0 \leq t \leq 1$, con $p(\cdot)$ assolutamente continua che verifica la condizione

$$(-\dot{p}, \dot{z}) \in \partial H(t, z, p) \quad \text{q.d.}$$

Si ha poi

$$-p_i(1) = \varepsilon_i^3 q_i + \frac{y_i(1) - c_i}{|y_i(1) - c_i|}, \quad |q_i| \leq L_1$$

e di qui segue, ricordando la definizione di cono normale,

$$-p(1) \in N(c_1; z(1)), \quad |p(1)| = 1.$$

Questo prova che (P) non è strettamente normale.

6. SOLUZIONI GENERALIZZATE SECONDO CRANDALL-LIONS

Esponiamo alcuni risultati di [2] che motivano la considerazione della condizione (5a) nel Teorema 2.

Fissiamo un aperto $0 \subset \mathbb{R}^n$ e consideriamo le successioni di funzioni continue

$$G_i : 0 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$u_i : 0 \rightarrow \mathbb{R},$$

che supponiamo localmente uniformemente convergenti rispettivamente alle funzioni continue G e u . Allora si hanno i seguenti teoremi 4 e 5.

Teorema 4. Se per ogni i le funzioni G_i e u_i verificano la condizione

$$-G_i(x, u_i(x), \xi) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } \xi \in D^- u_i(x),$$

allora la stessa condizione vale per G e u .

Se per ogni i è verificata la condizione

$$G_i(x, u_i(x), \xi) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } \xi \in D^+ u_i(x),$$

allora la stessa condizione vale per G e u .

Teorema 5. Supponiamo $u_i \in C^2(0)$ per ogni i e

$$0 < \varepsilon_i \longrightarrow 0 \quad \text{per } i \rightarrow \infty.$$

Se le funzioni G_i e u_i verificano la condizione

$$\varepsilon_i \Delta u_i(x) \leq G_i(x, u_i(x), \nabla u_i(x)) \quad \text{per } x \in 0,$$

allora G e u verificano la condizione

$$(19-) \quad -G(x, u(x), \xi) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } \xi \in D^-u(x).$$

Se G_i e u_i verificano la condizione

$$G_i(x, u_i(x), \nabla u_i(x)) \leq \varepsilon_i \Delta u_i(x) \quad \text{per } x \in 0$$

allora G e u verificano la condizione

$$(19+) \quad G(x, u(x), \xi) \leq 0 \quad \text{per ogni } x \in 0 \text{ e } \xi \in D^+u(x).$$

Osservazione. Il teorema 5 vale ancora se si sostituisce $\Delta u_i(x)$ con

$$\Delta' u_i(x) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 u_i(x), \quad 1 \leq m \leq n.$$

In tal caso è sufficiente che $u_i \in C^1(0)$ e che esistano e siano continue le derivate $(\partial/\partial x_k)^2 u_i$ per $1 \leq k \leq m$.

Per la dimostrazione dei teoremi precedenti, in [2] viene utilizzata la seguente caratterizzazione delle condizioni (19+)

Teorema 6. Supponiamo u e G continue. Allora sono equivalenti le affermazioni

- i) vale (19±);
- ii) se $0 \leq \phi \in C_0^\infty(0)$, $k \in \mathbb{R}$, $\max\{\pm \phi(x)[u(x)-k]\} > 0$, allora esiste

$y \in 0$ tale che

$$(20\pm) \quad \begin{cases} \pm \phi(y) [u(y)-k] = \max_x \{ \pm \phi(x) [u(x)-k] \}, \\ \pm G(y, u(y)) - \frac{u(y)-k}{\phi(y)} \nabla \phi(y) \leq 0. \end{cases}$$

La condizione ii) è assunta in [2] come definizione iniziale di soluzione generalizzata. In [2] e [5] sono ottenuti anche diversi risultati di unicità per le soluzioni generalizzate del problema di Dirichlet. In [5] viene usato il Teorema 5 per provare vari teoremi di esistenza. Ci limitiamo a ricordare un risultato enunciato in [5] (Theorem 9.1, Remark 9.1, pag. 204-5).

Sia $0 \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $T > 0$, $Q = [0, T] \times 0$. Supponiamo che la funzione

$$\bar{Q} \times \mathbb{R}^n \ni (t, x, p) \longrightarrow H(t, x, p) \in \mathbb{R}$$

sia convessa rispetto a p e verifichi le condizioni

$$H(t, x, 0) = 0 \quad \text{in } \bar{Q},$$

$$|H(t', x', p') - H(t, x, p)| \leq C(1 + |p|) |(t', x', p') - (t, x, p)|,$$

$$\inf_{(t, x) \in \bar{Q}} H(t, x, p) \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} +\infty.$$

Allora si ha il seguente

Teorema 7. Se H verifica le condizioni precedenti e se esiste $v : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana e tale che

$$v_t + H(t, x, \nabla_x v) \leq 0 \quad \text{q.d. in } Q,$$

allora esiste $u : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana e tale che

$$u = v \quad \text{su } \partial Q \setminus (\{T\} \times 0),$$

$$u \geq v \quad \text{su } \bar{Q},$$

$$\pm [\alpha + H(t, x, \beta)] \leq 0 \quad \text{per ogni } (\alpha, \beta) \in D u(t, x)$$

e per ogni (t, x) interno a Q .

Terminiamo con alcuni esempi.

Esempio 1. Consideriamo il problema in \mathbb{R}

$$(P_1) \quad \min\{|x(1)| \mid |\dot{x}(t)| \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad x(1) \in [1, 2]\}.$$

Dalle condizioni

$$1 \leq x(1) = \int_0^1 \dot{x}(t) dt \leq 1$$

segue $\dot{x}(t) = 1$ q.d. e quindi che $z(t) = t$ è soluzione.

Se $x(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è una traiettoria tale che $x(0) = 0$, allora riesce $|x(1)| \leq 1$ e quindi

$$\begin{aligned} |z(1)| &= 1 = (1 - |x(1)|) + |x(1)| \leq |1 - x(1)| + |x(1)| = \\ &= |x(1)| + \rho(x(1), [1, 2]) \end{aligned}$$

Dunque il problema è calmo in $z(\cdot)$.

L'Hamiltoniana è data da $H(x,p) = |p|$ e si ha

$$\partial H(x,p) = \{0\} \times \begin{cases} \left\{ \frac{p}{|p|} \right\} & \text{se } p \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{se } p = 0 \end{cases}$$

Si ha inoltre $N([1,2] ; 1) =]-\infty, 0]$.

Allora la funzione $p(t) \equiv 1$ per $0 \leq t \leq 1$ è soluzione del problema

$$(-\dot{p}, \dot{z}) \in \partial H(z,p) \quad , \quad -p(1) \in N([1,2] ; z(1))$$

Questo prova che il problema (P_1) non è strettamente normale.

Esempio 2. Sia O aperto in R^n e $g \in C^1(O)$ tale che

$$|g(x)| + |\nabla g(x)| > 0 \quad \text{per ogni } x \in O.$$

Posto $O^\pm = \{x \in O \mid \pm g(x) > 0\}$, supponiamo $u^\pm \in C^1(\bar{O}^\pm)$ tali che

$$u^+(x) = u^-(x) \quad \text{se } g(x) = 0$$

e poniamo

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{se } x \in O^+, \\ u^-(x) & \text{se } x \in O^-. \end{cases}$$

Allora si ha $\alpha \in D^\pm u(x)$, $g(x) = 0$, se e solo se

$$\begin{cases} \pm \nabla u^\pm(x) \cdot \nabla g(x) \leq \pm \alpha \cdot \nabla g(x) \leq \pm \nabla u^\mp(x) \cdot \nabla g(x) , \\ \nabla u^\pm(x) \cdot h = \alpha \cdot h \quad \text{se } \nabla g(x) \cdot h = 0. \end{cases}$$

In particolare, se $g(x) = x_n$, le condizioni precedenti si scrivono nella forma

$$\begin{cases} \pm D_n u^\pm(x) \leq \pm \alpha_n \leq \pm D_n u^\mp(x); \\ D_j u^\pm(x) = \alpha_j \quad \text{per } 1 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

Per la verifica rimandiamo a [2], I.3.

Esempio 3. La funzione u definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ da

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq |x| \\ t - |x| & \text{se } t \geq |x| \end{cases}$$

è lipschitziana e verifica la condizione

$$u_t - |\nabla_x u| = 0 \quad \text{q.d.}$$

Se $t_0 > 0$, si verifica che risce $(\alpha, \beta) \in D^+u(t, 0)$ se e solo se

$$\alpha = 1 \geq |\beta|.$$

Ne segue che

$$\alpha - |\beta| = 1 - |\beta| > 0 \quad \text{se } |\beta| < 1,$$

e quindi che non vale la condizione (19+).

Siccome si ha $D^-u(t_0, 0) = \emptyset$, vale la (19-).

Esempio 4. Consideriamo il problema in \mathbb{R}

$$\phi(s,u) = \min\{1-|x(1)| \mid |\dot{x}(t)| \leq 1 \text{ per } s \leq t \leq 1, x(s) = u\}$$

per $0 \leq s \leq 1, u \in \mathbb{R}$.

Si verifica che il problema ha soluzione. Si ha $H(x,p) = |p|$ e quindi, se $x(\cdot): [s,1] \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione, esiste $p(\cdot): [s,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$(-\dot{p}, \dot{x}) \in \{0\} \times \partial |p|, \quad -p(1) \in -\partial |x(1)|$$

Pertanto si ha $\dot{p} = 0$ q.d. e quindi $p(t) = p(1)$ per $s \leq t \leq 1$.

Se $x(1) > 0$, si ha $p(1) = 1 = p(t)$ e quindi $\dot{x}(t) = 1$,

$$x(t) = u + t - s \quad \text{per } s \leq t \leq 1,$$

$$0 < x(1) = u + 1 - s,$$

$$1 - |x(1)| = s - u.$$

Se $x(1) < 0$, si ha $p(1) = -1 = p(t)$ e quindi $\dot{x}(t) = -1$,

$$x(t) = u + s - t \quad \text{per } s \leq t \leq 1,$$

$$0 > x(1) = u + s - 1$$

$$1 - |x(1)| = s + u.$$

Siccome $s + u \leq s - u$ se e solo se $u \leq 0$, si ottiene

$$\phi(s,u) = s - |u| \quad \text{per } 0 \leq s \leq 1, u \in \mathbb{R}.$$

Se $z(t) = t$ per $0 \leq t \leq 1$, allora $z(\cdot)$ è soluzione per $\phi(0,0)$ e ϕ verifica le condizioni del Teorema 2, con $G_1 = \mathbb{R}$, ma non è soluzione generalizzata secondo Crandall-Lions [2] dell'equazione $\phi_t - |\phi_x| = 0$, come prova l'Esempio 3.

Tuttavia, consideriamo il problema

$$\phi_\epsilon(s,u) = \min\{1 - |x(1)| \mid |\dot{x}(t)| \leq 1, |x(t) - t| \leq \epsilon \text{ per } s \leq t \leq 1, x(s)=u\}$$

con $0 < \epsilon < 1$. Questo ha soluzione data da

$$\phi_\epsilon(s,u) = s - u \quad \text{per } 0 \leq s \leq 1, \quad u \in \mathbb{R}$$

Ora è $\phi_\epsilon \in C^1$ e quindi è anche soluzione secondo Crandall-Lions. Osserviamo che $\phi(s,u) < \phi_\epsilon(s,u)$ per $u < 0$.

Esempio 5. Consideriamo il problema in \mathbb{R}^2

$$\min\{x_2(1) \mid \dot{x}_1 = 0, |\dot{x}_2| \leq |x_1|, x_1(0) = 0 = x_2(0)\}.$$

La sua unica soluzione è $z(t) = (0,0)$ e il problema è calmo in $z(\cdot)$, poiché $C_1 = \mathbb{R}^2$. Proviamo che non esiste alcuna funzione ϕ di classe C^1 che verifica le condizioni del Teorema 2. Infatti, se esiste una tale ϕ si ha

$$\phi(1, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) = x_2,$$

$$\phi(0, 0, 0) = 0,$$

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = |x_1| |p_2|,$$

$$\phi_t(t, x_1, x_2) - |x_1| |\phi_{x_2}(t, x_1, x_2)| = 0.$$

Poniamo

$$y(\theta) = (x_1, x_2 - |x_1|(\theta-t)) \quad \text{per } 0 \leq t \leq \theta \leq 1.$$

Allora si ha

$$\max_{\theta} |y(\theta)| \longrightarrow 0 \quad \text{per } |(x_1, x_2)| \longrightarrow 0$$

e, poiché $\phi_{y_2}(1, y_1, y_2) = 1$, si ha anche

$$\phi_{y_2}(\theta, y(\theta)) \geq 0 \quad \text{per } t_0 \leq \theta \leq 1,$$

con $0 \leq t_0 < 1$. Ne segue

$$\begin{aligned} \phi(1, y(1)) - \phi(t, y(t)) &= \int_t^1 D_{\theta} \phi(\theta, y(\theta)) d\theta = \\ &= \int_t^1 |x_1| [|\phi_{y_2}(\theta, y(\theta))| - \phi_{y_2}(\theta, y'(\theta))] d\theta = 0 \end{aligned}$$

se $t_0 \leq t \leq 1$. Pertanto si ha

$$\phi(t, x_1, x_2) = x_2 - |x_1|(1-t)$$

per $t_0 \leq t \leq 1$ e $|(x_1, x_2)|$ sufficientemente piccolo, e questo esclude che ϕ sia di classe C^1 . Questo esempio è dovuto a Clarke.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F.H. CLARKE-R.B. VINTER: Local optimality conditions on lipschitzian solutions to the Hamilton.-Jacobi equations. SIAM J. Control Optim. 21, 6(1983), 856-70.
- [2] M.G. CRANDALL-P.L. LIONS: Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. Trans. AMS 277, 1(1983), 1-42.
- [3] F.H. CLARKE: Generalized gradients and applications. Trans. AMS 205 (1975), 247-62.
- [4] F.H. CLARKE: Necessary conditions for a general control problem. Calculus of Variations and Control Theory, D.L. Russel ed., Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin-Madison, Academic Press, New York, 1976.
- [5] P.L. LIONS: Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations-Pitman Research Notes Services, n. 69, Pitman, London, 1982.
- [6] A.F. FILIPPOV: Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side. SIAM J. Control Optim. 5(1967), 609-21.
- [7] J.P. AUBIN-A. CELLINA: Differential inclusions - Springer, 1982.
- [8] F.H. CLARKE: The Erdman condition and Hamiltonian inclusions in optimal control and the calculus of variations. Canad J. Math. 32, 2 (1980), 494-509.

- [9] L.C. EVANS: On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods. Israel J. Math. 36 (1980), 225-47.
- [10] R.B. VINTER: New global optimality conditions in optimal control theory. SIAM J. Control Optim. 21(1983), 235-45.